ملخص لأهم نقاط المقرر في الإحصاء

معامل الارتباط (ر)

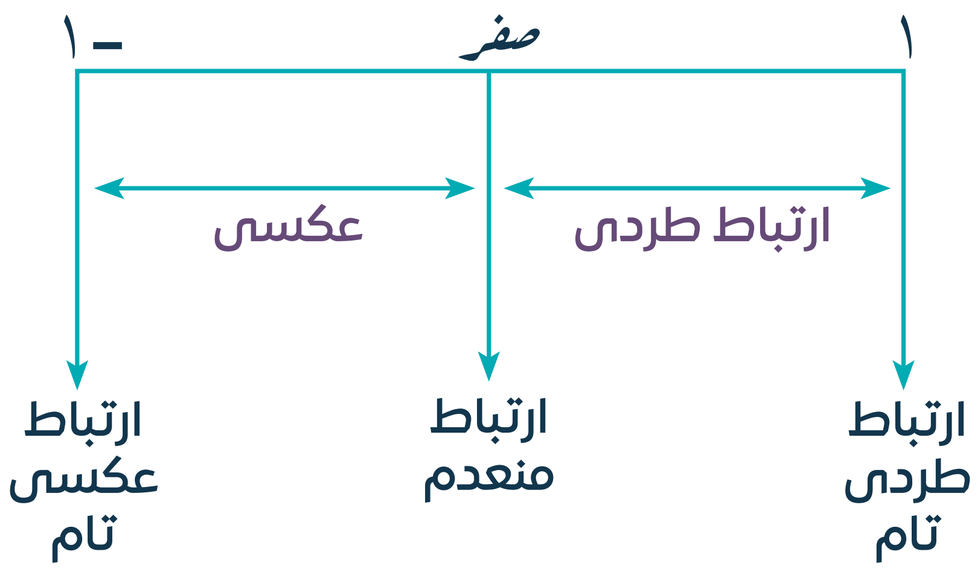
هو مقياس كمي نسبي يقيس قوة الارتباط بين متغيرين وله الخصائص التالية:

١) ر تكون موجبة في حالة الارتباط الطردي، وسالبة في حالة الارتباط العكسي.

٢) ر ∈ [-١ ، ١] أى أن : $-١ \leq ر \leq ١$

٣) تتحدد درجة الارتباط (كما اتفق عليه) كما يلي :

- ارتباط منعدم (صفري) إذا كانت ر = صفر
- ارتباط ضعيف إذا كان $٠ < |ر| < ٠٫٤$
- ارتباط متوسط إذا كان $٠٫٤ \leq |ر| \leq ٠٫٦$
- ارتباط قوي إذا كان $٠٫٦ < |ر| < ١$
- ارتباط طردي تام إذا كانت ر = ١
- ارتباط عكسي تام إذا كانت ر = -١



معامل ارتباط بيرسون (ر) (أو معامل الارتباط الخطي)

إذا كان س ، ص متغيرين لهما عدد (ن) من القيم فإن :

$$ر = \frac{ن \Sigma س ص - \Sigma س \Sigma ص}{\sqrt{ن \Sigma س^{٢} - (\Sigma س)^{٢}} \times \sqrt{ن \Sigma ص^{٢} - (\Sigma ص)^{٢}}}$$

ملاحظة

إذا كان : $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ هما المتوسطان لقيم س ، ص على الترتيب ، ن عدد القيم

فإن : $\overline{س} = \frac{\Sigma س}{ن}$ ، $\overline{ص} = \frac{\Sigma ص}{ن}$ **ومنها** $\Sigma س = \overline{س} \times ن$

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان إذا كان س ، ص متغيرين لهما عدد (ن) من القيم فإن :

$$ر = ١ - \frac{٦ \Sigma ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$$

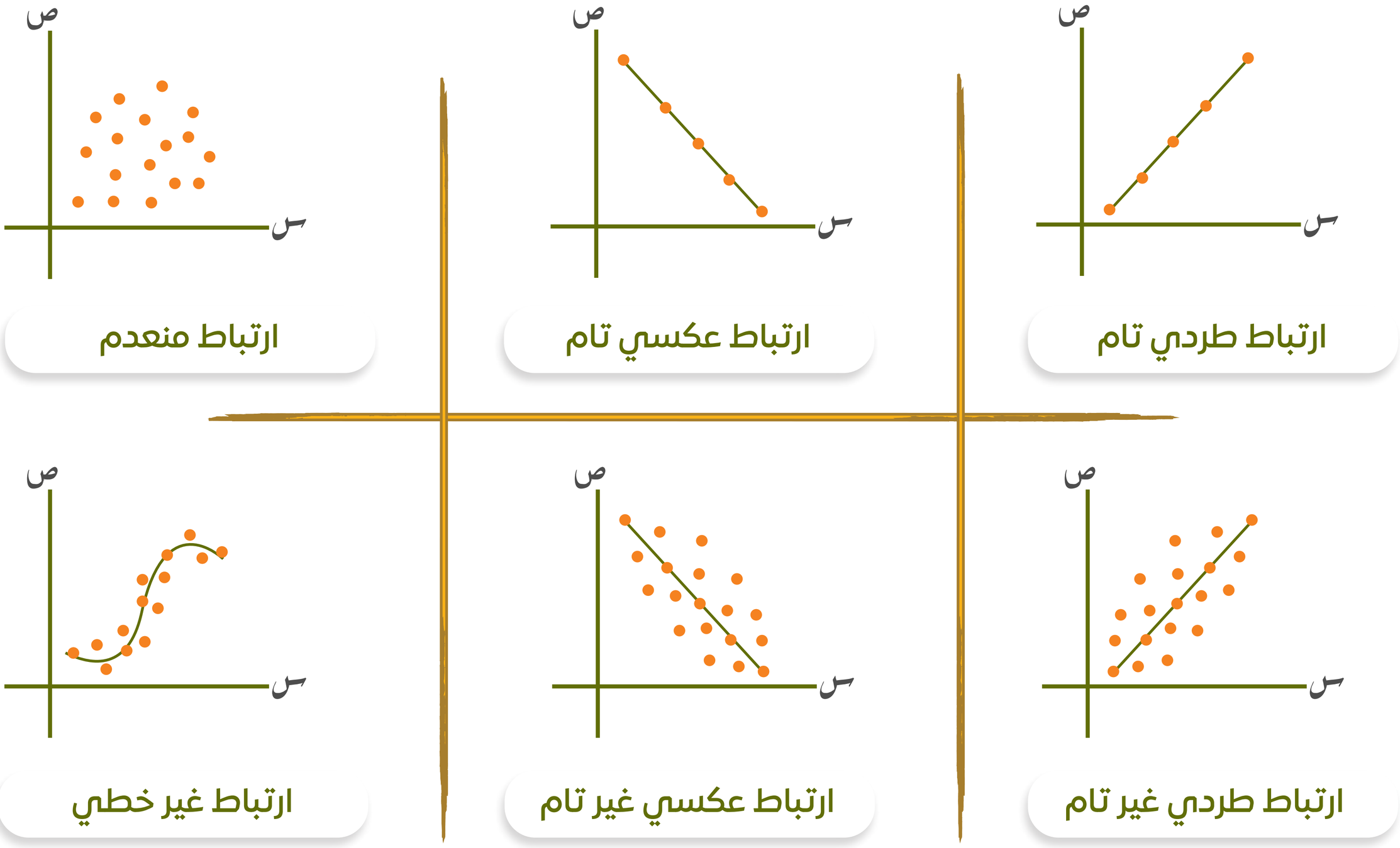
حيث **ف** هي الفرق بين رتب المتغيرين

الانحدار

الانحدار خط الانحدار هو خط مستقيم تقع النقط من حوله وقريبة منه وإن كانت لا تقع جميعها عليه.

شكل الانتشار وخط الانحدار

كلما اقتربت النقاط من خط الانحدار كلما زادت درجة الارتباط بين المتغيرين :



معادلة خط الانحدار

إذا كان : ص هو المتغير التابع ، س هو المتغير المستقل فإن:

معادلة خط الانحدار ص على س هي $\hat{ص} = ا + ب س$ ($\hat{ص}$ تقرأ ص هات) حيث :

$$ب = \frac{ن \Sigma س ص - \Sigma س \Sigma ص}{ن \Sigma س^{٢} - (\Sigma س)^{٢}} \quad ، \quad ا = \frac{\Sigma ص - ب \Sigma س}{ن}$$

وتسمى ب معامل انحدار ص على س وهي تعبر عن ميل خط الانحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ملاحظة

١ تستخدم معادلة خط انحدار ص على س في التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س .

٢ يحدد مقدار الخطأ من العلاقة :

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية – القيمة التي تحقق معادلة الانحدار |

٣ إشارة معامل الانحدار (ب) تدل على نوع الارتباط **حيث :**

- إذا كانت ب موجبة فإن الارتباط يكون طردياً.
- إذا كانت ب سالبة فإن الارتباط يكون عكسياً.

المدى – الوسط الحسابي – المنوال – الوسيط

المدى لمجموعة من القيم = القيمة العظمى – القيمة الصغرى.

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

المنوال : هو القيمة الأكثر تكراراً.

الوسيط: هو القيمة التي تتوسط القيم بعد ترتيبها.

تمثيل البيانات بالساق والأوراق

إذا كانت البيانات		
٢٥	٢٦و٣	٢٧و٢
٢٧و١	٢٥و٨	٢٤و٩
٢٤و٤	٢٣و٤	٢٦و٨
٢٥و٤	٢٥و٨	٢٧و٥
٢٣و٥	٢٤و٧	٢٦و٩

الساق	الأوراق
٢٣	٤ ٥
٢٤	٤ ٧ ٩
٢٥	٠ ٤ ٨ ٨
٢٦	٣ ٨ ٩
٢٧	١ ٢ ٥

المفتاح ٧ | ٢٤ = ٢٤و٧

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

التمثيل المزدوج بالساق والأوراق

درجات أحمد			
٣٧	٤٥	٣١	٣٦
٣٥	٤٠	٤١	٤٢
٤٠	٤٥	٥٠	٣٩

درجات محمود			
٤٢	٢٣	٣٤	٣٧
٤١	٣٤	٣٧	٤٥
٤٦	٤٨	٤٥	٤٣

درجات أحمد	الساق	درجات محمود
	٢	٣
٠ ٩ ٧ ٦ ٥ ١	٣	٤٤ ٧ ٧
٥ ٥ ٢ ١ ٠ ٠	٤	١٢ ٣ ٥ ٥ ٦ ٨
٠	٥	

المفتاح ١ | ٣ | ٤ تعنى ٣١ درجة لأحمد ، ٣٤ درجة لمحمود

مميزات طريقة تمثيل البيانات بالساق والأوراق

- يتم الاحتفاظ بالبيانات الأصلية عكس الجداول التكرارية التي لا يمكن العودة للبيانات الأصلية بعد تمثيلها في الجداول التكرارية.
- **عيوبها :** لا تكون مناسبة للبيانات ذات الأحجام الكبيرة.

الربيعات

١ الربيع الأول (أو الربيع الأدنى $ر_١$)

- **وهو** القيمة التي يسبقها $\frac{١}{٤}$ البيانات (٢٥٪) تقريبًا.الربيع ويليها $\frac{٣}{٤}$ البيانات

٢ الربيع الثانى (أو الوسيط $ر_٢$)

- **وهو** الوسيط أي القيمة التي يسبقها $\frac{١}{٢}$ البيانات (٥٠٪) تقريبًا.

٣ الربيع الثالث (أو الربيع الأعلى $ر_٣$)

- **وهو** وهو القيمة التي يسبقها $\frac{٣}{٤}$ البيانات (٧٥٪) تقريبًا. ويليها $\frac{١}{٤}$ البيانات

تعيين الربيعات من البيانات المفردة (غير المبوبة)

يوجد حالتان حيث عدد البيانات (ن)

- **الحالة الأولى:** إذا كان (ن + ١) يقبل القسمة على ٤

  فإن الربيعات تكون إحدى قيم البيانات المعطاة وتعين مباشرة.

- **الحالة الثانية:** إذا كان (ن + ١) لا يقبل القسمة على ٤ **فإن** الربيعات تعين من القانون.

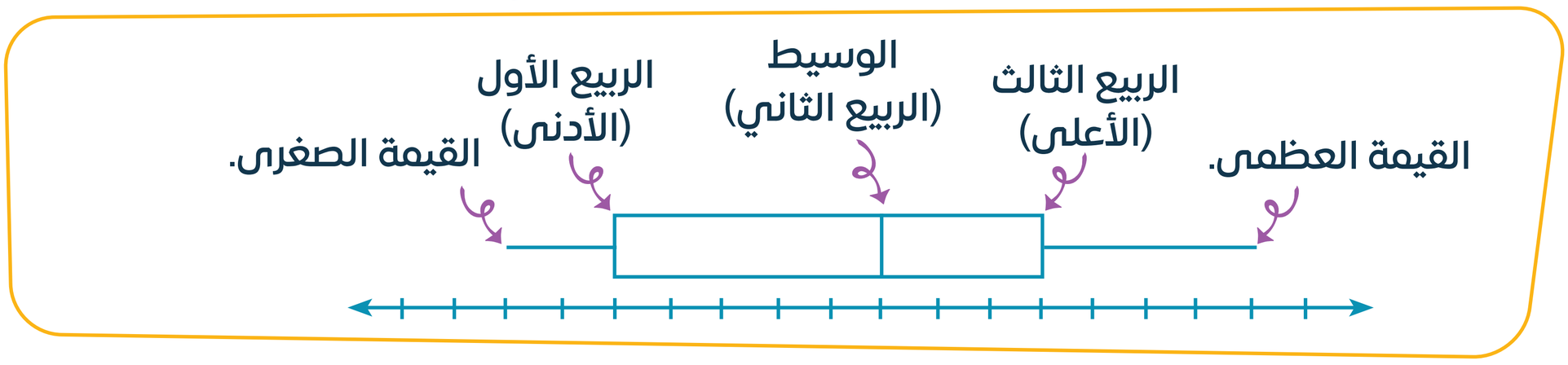
قيمة الربيع المطلوب = القيمة السابقة له + (القيمة التالية له – القيمة السابقة له) (الجزء العشرى فى ترتيب الربيع)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حيث

- ترتيب الربيع الأول $(ر_{١}) = \frac{ن + ١}{٤}$
- ترتيب الربيع الثاني $(ر_{٢}) = \frac{٢ (ن+١)}{٤}$
- ترتيب الربيع الثالث $(ر_{٣}) = \frac{٣ (ن+١)}{٤}$

التمثيل الصندوقي



- **ملحوظة** عدم احتواء الصندوق على القيم المتطرفة للبيانات وتمثيله لـ ٥٠٪ من البيانات الأكثر قرباً من الوسيط فقط.
- يوجد مقياس جديد للتشتت أفضل من المدى وهو نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي).

$$\text{نصف المدى الربيعي (ر)} = \frac{\text{الربيع الأعلى - الربيع الأدنى}}{٢}$$

تذكر أن

سبق لك دراسة بعض مقاييس التشتت

مثل المدى – التباين – الانحراف المعياري.

- من مميزات نصف المدى الربيعي: أنه سهل وبسيط ويفضل استخدامه في حالة وجود قيم متطرفة.
- من عيوب نصف المدى الربيعي: أنه يعتمد على $ر_{١}$ ، $ر_{٣}$ ولا يأخذ كل القيم في الاعتبار.

تعيين الربيعات من الجدول التكراري ذو المجموعات

أولاً تعيين الربيعات جبرياً

١ ننشئ الجدول التكراري المتجمع الصاعد.

٢ نعين ترتيبات الربيعات.

(ترتيب الربيع الأول = $\frac{ن}{٤}$ ، ترتيب الربيع الثاني = $\frac{٢ن}{٤}$ ترتيب الربيع الثالث = $\frac{٣ن}{٤}$) (حيث ن هو عدد البيانات)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

٣ نحدد الفترة (الفئة) التي يقع الربيع المطلوب فيها (تسمى الفترة الربيعية) ونحدد منها بداية الفترة ، طول الفترة ، التكرار المناظر لفترة الربيع ، التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الربيع.

٤ نستخدم القانون التالي لحساب الربيع المطلوب:

$$\text{الربيع المطلوب} = \text{بداية فترة الربيع} + \frac{\text{ترتيب الربيع} - \text{التكرار المتجمع الصاعد}}{\text{التكرار المناظر لفترة الربيع}} \times \text{طول فترة الربيع}$$

ثانياً تعيين الربيعات بيانياً

١ تعيين الجدول التكراري المتجمع الصاعد.

٢ رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد.

٣ تعيين ترتيبات الربيعات ($\frac{ن}{٤}$ ، $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{٣ن}{٤}$) وتحديدها على المحور الرأسي (التكرارات المتجمعة) حيث ن عدد البيانات.

٣ عند كل ترتيب من ترتيبات الربيعات نرسم خطاً أفقياً يقطع المنحنى المتجمع الصاعد في نقطة فيكون قيمة الربيع هي مسقط هذه النقطة على المحور الأفقي.

الاحتمال

التجربة العشوائية
هي كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها ولكن لا نستطيع أن نحدد أيّاً من هذه النواتج سوف يتحقق فعلاً عند إجرائها.

فضاء العينة (أو فضاء النواتج)
هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية ما ويرمز له عادة بالرمز (ف) ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز ن(ف) .

الحدث
هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة.

وقوع الحدث
هي يقال إن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية هو أحد عناصر المجموعة التي يتألف منها هذا الحدث.

الحدث المؤكد (ف)
هو حدث لا بد أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية.

الحدث المستحيل (∅)

حدث لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية

الحدث البسيط (أو الأولي)

مجموعة جزئية من فضاء العينة (ف) تحتوي على عنصر واحد فقط.

الحدثان المتنافيان

يقال إن الحدثين أ ، ب من فضاء عينة ف متنافيان إذا وفقط إذا كان أ ∩ ب = ∅

الأحداث المتنافية

يقال لعدة أحداث إنها متنافية إذا وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

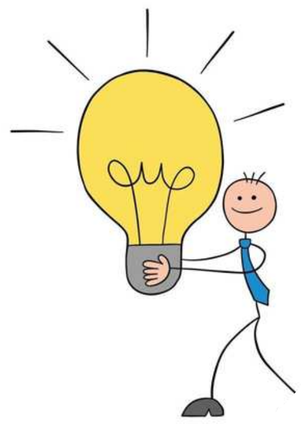
الحدث المكمل (أ′)

هو حدث عدم وقوع أ

- الأحداث البسيطة (الأولية) المختلفة في أي تجربة عشوائية تكون متنافية.
- الحدث أ ومكمله أ′ حدثان متنافيان

ويكون: أ) أ ∩ أ′ = ∅ (الحدث المستحيل)

ب) أ ∪ أ′ = ف (الحدث المؤكد)



مسلمات وقوانين الاحتمال

- لكل حدث أ ⊂ ف يكون صفر ≤ ل (أ) ≤ ١ أي أن ل(أ) ∈ [٠ ، ١]
- ل (أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب).
- إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن : ل (أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) .
- الجدول الآتي يلخص لنا احتمالات بعض الأحداث ، كما يوضح التعبير اللفظي عنها وتمثيلها بشكل فن :

احتمال الحدث	التعبير عنه لفظياً	تمثيل الحدث بشكل فن
ل (ف)	احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١	ف
ل (∅)	احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر	ف
ل(أ)	احتمال وقوع الحدث أ	ف أ

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

$ل(P') = ل(ف - P)$	احتمال الحدث المكمل للحدث P احتمال عدم وقوع الحدث P	ف P
$ل(P \cap ب)$	احتمال وقوع P ، ب معاً.	ف ب P
$ل(P \cup ب)$	احتمال وقوع P ، ب أو كليهما. احتمال وقوع أحدهما على الأقل. احتمال وقوع أي من الحدثين.	ف ب P
$ل(P - ب) = ل(P \cap ب')$ $ل(P) - ل(P \cap ب)$	احتمال وقوع P وعدم وقوع ب احتمال وقوع P فقط	ف ب P
$ل(P' \cup ب') = ل(P \cap ب)'$ $= ١ - ل(P \cap ب)$	احتمال عدم وقوع الحدثين معاً. احتمال وقوع أحدهما على الأكثر.	ف ب P
$ل(P' \cap ب') = ل(P \cup ب)'$ $= ١ - ل(P \cup ب)$	احتمال عدم وقوع أي من الحدثين. احتمال عدم وقوع P وعدم وقوع ب	ف ب P
$ل(ب' \cup P) = ل(ب - P)'$ $= ١ - ل(ب - P)$	احتمال وقوع ب أو عدم وقوع ب احتمال عدم وقوع P فقط.	ف ب P
$ل[(P - ب) \cup (ب - P)]$ $= ل(P \cup ب) - ل(P \cap ب)$	احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر. احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.	ف ب P

حساب الاحتمال

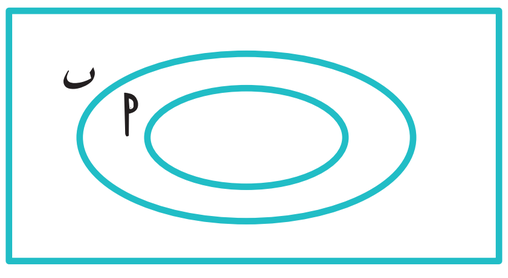
إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات، فإن احتمال وقوع أي حدث أ ⊂ ف يعطى بالقانون:

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

أى أن: $ل(أ) = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

إذا كان أ ⊂ ب فإن:

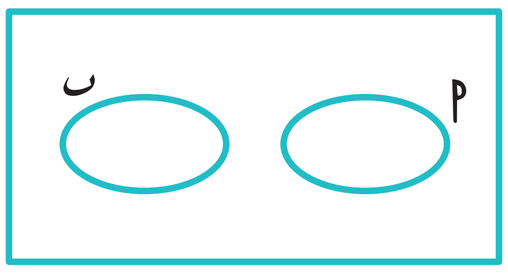
ف



- $ل(أ ∩ ب) = ل(أ)$
- $ل(أ ∪ ب) = ل(ب)$
- $ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ)$
- $ل(أ - ب) = ل(∅) =$ صفر

إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن:

ف



- $ل(أ ∩ ب) =$ صفر
- $ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)$
- $ل(أ - ب) = ل(أ)$
- $ل(ب - أ) = ل(ب)$

إذا كان $ل(أ) = ل(أ')$ فأن $ل(أ) = \frac{١}{٢}$

وبصفة عامة: إذا كان $\frac{ل(أ)}{ل(أ')} = \frac{م}{ن}$ فأن: $ل(أ) = \frac{م}{م+ن}$ و $ل(أ') = \frac{ن}{م+ن}$

قانونا "دى مورجان"

- $أ' ∪ ب' = (أ ∩ ب)'$
- $أ' ∩ ب' = (أ ∪ ب)'$

ولذالك نجد أن:

- $ل(أ' ∪ ب') = ل(أ ∩ ب)' = ١ - ل(أ ∩ ب)$
- $ل(أ' ∩ ب') = ل(أ ∪ ب)' = ١ - ل(أ ∪ ب)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

لاحظ الفرق بين التعبيرات الآتية :

- احتمال عدم وقوع P أو عدم وقوع ب ← ل (P′ ∪ ب′)
- احتمال عدم وقوع P و وقوع ب ← ل (P′ ∪ ب)
- احتمال عدم وقوع (P أو ب) ← ل (P ∪ ب′) «باقي التعبيرات اللفظية راجع الجدول السابق»

الاحتمال الشرطي

ونرمز لاحتمال وقوع الحدث (P) بشرط أن (أو علماً بأن) (أو إذا كان) ب قد وقع بالفعل بالرمز ل (P | ب)

ويعرف كما يلي : $ل(P|ب) = \frac{ل(P \cap ب)}{ل(ب)}$ **حيث** ل (ب) > ٠

ملاحظات

١ **الاحتمال الشرطي يتمتع بنفس خواص الاحتمال (غير الشرطي)**

أي أن : ٠ ≤ ل (P | ب) ≤ ١ ← $ل(ف|ب) = \frac{ل(ف \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{ل(ب)}{ل(ب)} = ١$

← ل (P′ | ب) = ١ − ل (P | ب)

٢ ل (P | ب) ≠ ل (ب | P)

٣ **إذا كان ل دالة احتمال منتظمة فإن :** $ل(P|ب) = \frac{ل(P \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{\text{عدد عناصر } (P \cap ب)}{\text{عدد عناصر } (ب)}$

٤ **نعلم أن** $ل(P|ب) = \frac{ل(P \cap ب)}{ل(ب)}$ **حيث** ل (ب) ≠ ٠ **أي أن :** ل (P ∩ ب) = ل (ب) . ل (P | ب)

$ل(ب|P) = \frac{ل(ب \cap P)}{ل(P)}$ **حيث** ل (P) ≠ ٠ **أي أن :** ل (P ∩ ب) = ل (P) . ل (ب | P)

∴ ل (P ∩ ب) = ل (P) . ل (ب | P) = ل (ب) . ل (P | ب)

وهذا يعني أن :

احتمال وقوع (P ، ب) = احتمال وقوع P × احتمال وقوع ب بشرط وقوع P

= احتمال وقوع ب × احتمال وقوع P بشرط وقوع ب

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الأحداث المستقلة وغير المستقلة

الحدثان المستقلان:

- يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع أحد الحدثين لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر
- إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين فإن: $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

أي أن: احتمال وقوع حدثين مستقلين معاً

= احتمال « وقوع الحدث الأول » × احتمال « وقوع الحدث الثاني ».

أمثلة الأحداث المستقلة

- إلقاء قطعة نقود ثم إلقاء حجر نرد مرة واحدة.
- نجاح طالب في مقرر اللغة العربية ونجاحه في مقرر الرياضيات.
- سُحبت كرة عشوائياً من كيس ثم أعيدت إلى الكيس ، ثم سُحبت كرة ثانية.

الأحداث غير المستقلة :

- يكون أ ، ب حدثين غير مستقلين إذا كان $ل(أ \cap ب) \neq ل(أ) \times ل(ب)$

ومن أمثلة الأحداث غير المستقلة

- سحب كرة عشوائياً من كيس دون إعادتها ، ثم سحب كرة ثانية.

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

المتغير العشوائي

إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية

فإن: أي دالة $س : ف \longrightarrow ح$ تسمى متغيراً عشوائياً معرفاً على ف

مدى المتغير العشوائي

هو مجموعة جزئية من ح وهو مجموعة القيم المناظرة لعناصر فضاء العينة والتي تحددها دالة المتغير العشوائي.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

لاحظ أن

- المتغير العشوائي يجزئ فضاء العينة ف إلى أحداث متنافية ، كل حدث منها يرتبط بعدد حقيقي ، وهذا الارتباط يُعبر عن دالة س من فضاء العينة ف إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ح

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

المتغير العشوائي المتقطع (أو المنفصل) :

- هو المتغير العشوائي الذي مداه مجموعة منتهية أو قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

ومن أمثلة ذلك :

١ عدد الأسهم المخصصة لأحد الأفراد في اكتتاب شركة مساهمة.

٢ عدد الحوادث على إحدى الطرق السريعة خلال شهر.

٣ عدد المكالمات التليفونية الصادرة لأسرة خلال أسبوع.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع :

- إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه المجموعة {س١ ، س٢ ، س٣ ، ..... ، سن}

فإن الدالة د حيث د(سر) = ل(س = سر) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن

تحدد ما يسمى بـ التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س

والذي يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة الآتية

{(س١ ، د(س١)) ، (س٢ ، د(س٢)) ، ..... ، (س ن ، د(سن))}

ويفضل أن توضع على صورة جدول كالآتي :

سر	س١	س٢	.....	سن
د(سر)	د(س١)	د(س٢)		د(سن)

وهذه الدالة تحقق الشرطين الآتيين :

١ د(سر) > صفر لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن

٢ د(س١) + د(س٢) + د(س٣) + ... + د(سن) = ١

لاحظ أن

- أي دالة تحقق الشرطين السابقين تصلح أن تكون «دالة توزيع احتمالي» لمتغير عشوائي متقطع.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المتوسط – التباين – الانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتقطع

- **المتوسط أو التوقع « μ » :** هو أحد مقاييس النزعة المركزية وهو القيمة التي تتمركز حولها معظم قيم المتغير العشوائي.
- **التباين « σ^2 » :** هو أحد مقاييس التشتت وهو يقيس مدى تشتت قيم المتغير العشوائي حول متوسطه.
- **الانحراف المعياري « σ » :** هو أحد مقاييس التشتت ويتميز بأنه يقاس بنفس وحدات المتغير العشوائي ويصلح للمقارنة بين مجموعتين لهما نفس الوحدات ونفس المتوسط ويساوي الجذر التربيعي الموجب للتباين.
- **معامل الاختلاف :** هو مقياس نسبي للتشتت لا يتأثر باختلاف الوحدات أو اختلاف المتوسط.

حساب المتوسط ، التباين والانحراف المعياري

- إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً يأخذ القيم : $س_1$ ، $س_2$ ، ..... ، $س_ن$ باحتمالات $د(س_1)$ ، $د(س_2)$ ، ..... ، $د(س_ن)$ على الترتيب

١ المتوسط $\mu = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر)$

٢ التباين $\sigma^2 = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \cdot د(س_ر) - \mu^2$

٣ الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$

٤ معامل الاختلاف $= \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات

١ لحساب كل من المتوسط والتباين والانحراف المعياري نكون جدولاً من ٤ أعمدة كالتالي :

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر . د(س_ر)$	$س_ر^٢ . د(س_ر)$
المجموع		$\sum_{ر=١}^{ن} س_ر . د(س_ر)$	$\sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ . د(س_ر)$

٣ عناصر العمود الرابع تحسب من ضرب عناصر العمودين الأول والثالث المناظرة.

٤ كل من التباين والانحراف المعياري يكون عدداً موجباً بينما المتوسط قد يكون موجباً أو سالباً أو صفراً حسب قيم المتغير العشوائي.

التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدين

تجربة بيرنولي : هي تجربة عشوائية لها ناتجين فقط «نجاح أو فشل»
ويكون (احتمال النجاح + احتمال الفشل = ١)

تكرار تجربة بيرنولي

- عدد من المرات المستقلة حتى الوصول إلى أول نجاح ← التجربة الاحتمالية الهندسية
- عدد من المرات المستقلة حتى الوصول إلى أول نجاح ← التجربة الاحتمالية ذي الحدين

أولاً التجربة الاحتمالية الهندسية

هي تكرار تجربة بيرنولي عدد من المرات المستقلة حتى الوصول إلى أول نجاح.

شروط التجربة الاحتمالية الهندسية :

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما ، فإنها تُعدُّ تجربة احتمالية هندسية.

١ اشتمال التجربة على محاولة أو عدة محاولات متكررة ومستقلة.

٢ كل محاولة لها نتيجتين متنافيتين فقط (نجاح أو فشل).

٣ ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

٤ التوقف عند أول نجاح.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- المتغير العشوائي س الذي يرمز إلى عدد محاولات الوصول لأول نجاح يسمى متغير عشوائي هندسي ونرمز له بالرمز: س ~ هندسي (ح) حيث ح يمثل احتمال النجاح.

ثانياً التجربة الاحتمالية ذات الحدين

- **هي تكرار تجربة بيرنولي عدداً محدداً من المرات المستقلة بأي عدد من مرات النجاح.**

شروط التجربة الاحتمالية ذات الحدين :

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما ، فإنها تُعدُّ تجربة احتمالية ذات حدين.

١) اشتمال التجربة على محاولات متكررة ومستقلة.

٢) كل محاولة لها نتيجتين متنافيتين فقط (نجاح أو فشل).

٣) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

٤) وجود عدد محدد (ن) من المحاولات في التجربة.

- المتغير العشوائي ذي الحدين يرمز له بالرمز: س ~ جدين (ن ، ح)

حيث ن عدد محاولات التجربة ، ح احتمال النجاح .

مقارنة بين التوزيع الاحتمالي الهندسي وتوزيع ذي الحدين

التوزيع الاحتمالي الهندسي	التوزيع ذي الحدين
الرمز: س ~ هندسي (ح) حيث ح هي احتمال النجاح.	**الرمز:** س ~ حدين (ن ، ح) حيث ن عدد المحاولات و ح هي احتمال النجاح.
يمكن أن يحتوي على عدد لا نهائي من المحاولات.	يحتوي على عدد محدد من المحاولات يرمز له بالرمز (ن).
تتوقف المحاولات عند الحصول على أول نجاح.	تتوقف المحاولات بعد عدد ن من المحاولات.
يظهر حدث النجاح مرة واحدة فقط.	قد يظهر حدث النجاح أكثر من مرة أو قد لا يظهر على الإطلاق.
تكتب دالة التوزيع الاحتمالي الهندسي على صورة : $ل(س = ر) = (ح)(١ - ح)^{ر-١}$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ،	تكتب دالة توزيع ذي الحدين على صورة $ل(س = ر) = ن_{ر} (ح)^{ر} (١ - ح)^{ن-ر}$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ن

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- المتوسط (التوقع) = $\frac{١}{ع}$
- التباين = $\frac{١ - ع}{ع^{٢}}$
- الانحراف المعياري $ح$ = الجذر التربيعي الموجب للتباين.

مثـال :

إذا كان احتمال فوز أحد الفرق الرياضية في أي مباراة ٠,٦ ، فإحتمال أن يفوز لأول مرة في المباراة الرابعة

الحـل

$$ل (س = ٤) = ٠,٦ (١ - ٠,٦)^{٤-١} = \frac{٢٤}{٦٢٥}$$

- المتوسط (التوقع) = $ن ع$
- التباين = $ن ع (١ - ع)$
- الانحراف المعياري $ح$ = الجذر التربيعي الموجب للتباين.

مثـال :

إذا كان احتمال فوز أحد الفرق الرياضية في أي مباراة ٠,٦ ، فإحتمال أن يفوز ثلاث مرات في ٤ مباريات.

الحـل

$$ل (س = ٣) = {}_{٣}ق^{٤} (٠,٦)^{٣} (١ - ٠,٦)^{٤-٣}$$

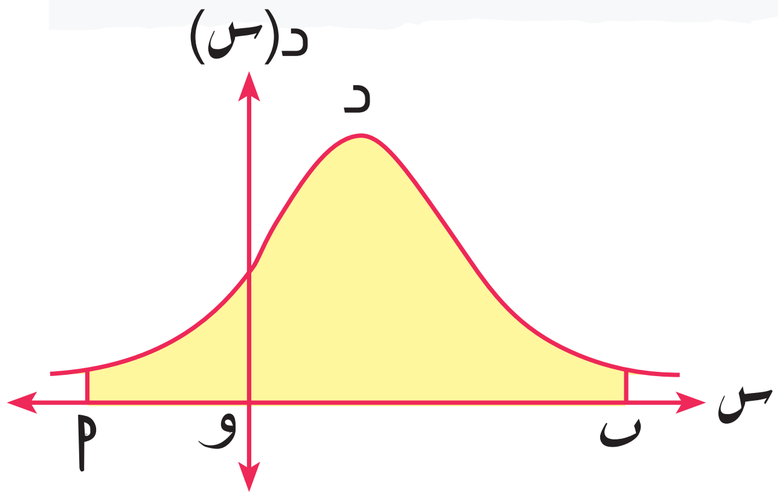
$$= \frac{٢١٦}{٦٢٥}$$

المتغير العشوائي المتصل (أو المستمر) :

- هو المتغير العشوائي الذي مداه فترة مفتوحة أو مغلقة.

دالة الكثافة

- إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً فإن الدالة الحقيقية د التي مداها غير سالب تسمى دالة الكثافة الاحتمالية إذا كانت تحقق الشرطين الآتيين معاً :



١) منحنى الدالة د يقع فوق محور السينات أي أن:
د (س) ⩾ ٠ لجميع قيم س التي تنتمي لمجال دالة.

٢) مساحة المنطقة أسفل منحنى الدالة د وفوق محور السينات تساوي الواحد الصحيح.

- ويمكن من خلالها إيجاد احتمالات الأحداث المعبر عنها بواسطة المتغير العشوائي فيكون:

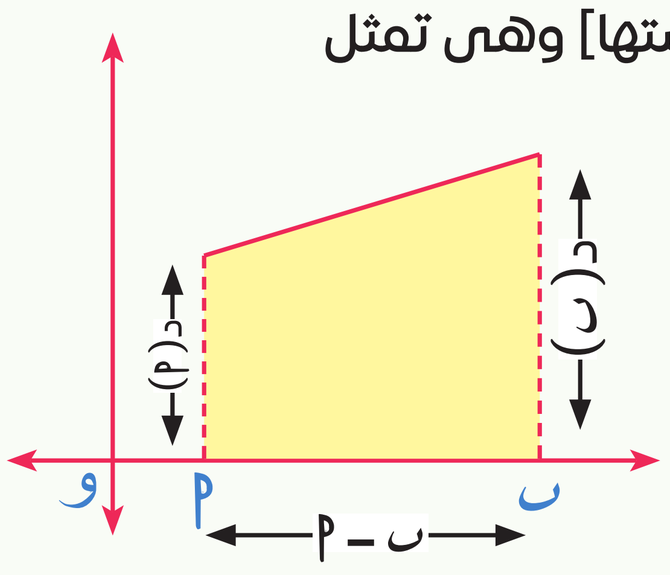
ل (أ ⩽ س ⩽ ب) = مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى وفوق محور السينات في الفترة [أ ، ب] حيث أ < ب

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظة

١ مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (مجموع طولى القاعدتين المتوازيتين) × الارتفاع

٢ دالة الكثافة تكون عبارة عن دالة ثابتة أو خطية [الدوال المقرر دراستها] وهى تمثل بقطعة مستقيمة أو أكثر حسب قاعدة الدالة.



ففى الشكل المقابل :

إذا كانت د (س) تمثل دالة كثافة احتمال فإن :

ل (أ ≤ س ≤ ب) = مساحة المنطقة المظللة

$= \frac{١}{٢}$ [د (أ) + د (ب)] × (ب - أ)

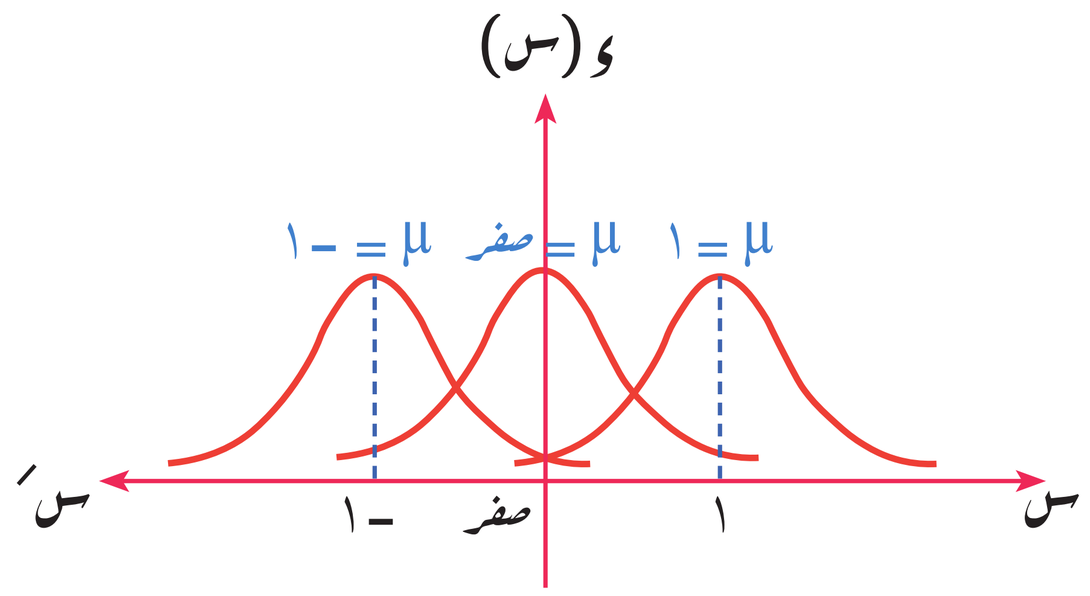
٣ ل (س = أ) = ل (س = ب) = صفر ولذلك **نجد أن :**

ل (أ ≤ س ≤ ب) = ل (أ ≤ س < ب) = ل (أ < س ≤ ب) = ل (أ < س < ب)

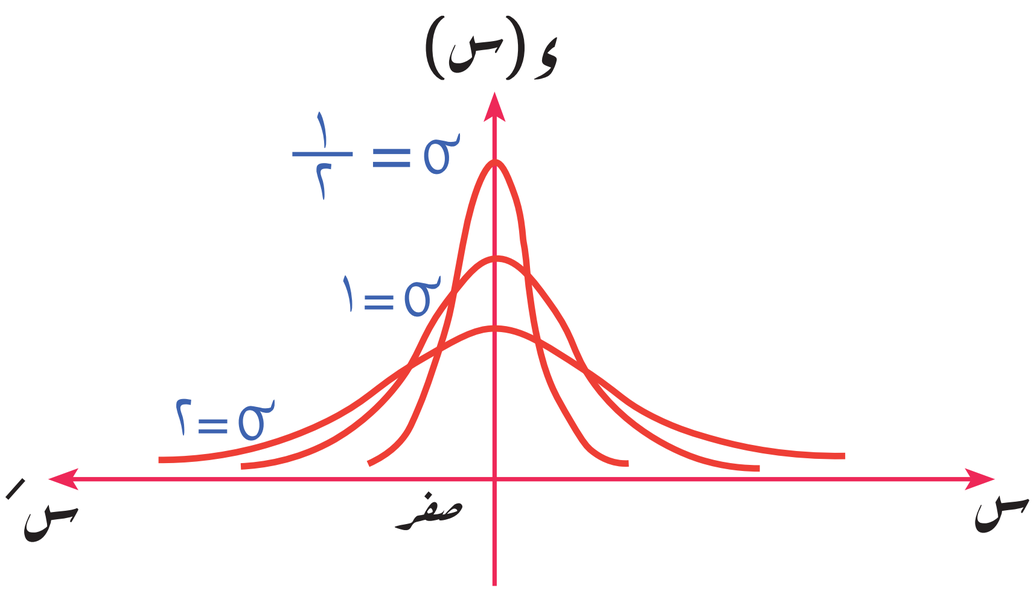
المتغير العشوائي الطبيعي

هو متغير عشوائي متصل مداه الفترة] -∞ ، ∞[، ودالة كثافة الاحتمال له تعتمد على قيمتين هما متوسطه μ وانحرافه المعياري σ ، ويسمى منحنى هذه الدالة بالمنحنى الطبيعي أو منحنى جاوس ويأخذ دائماً شكل الجرس

كما في الأشكال الآتية :

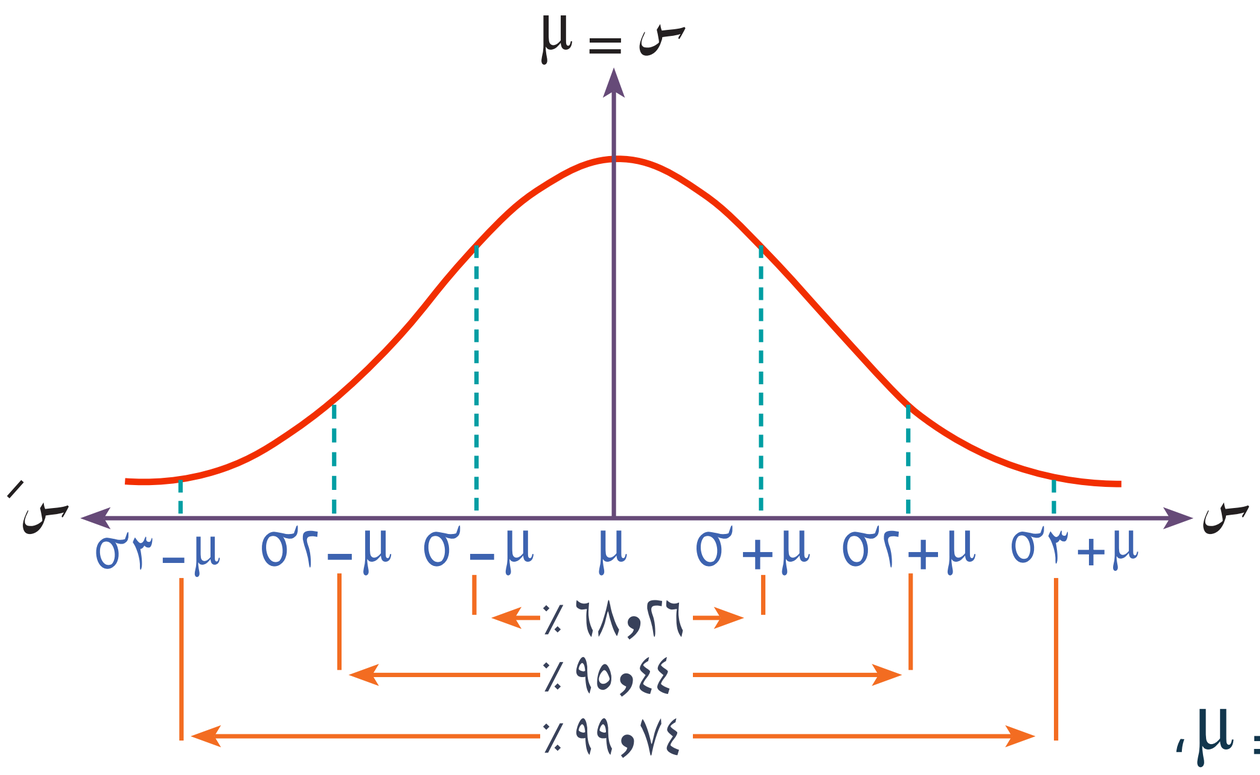


بعض المنحنيات الطبيعية لها نفس الانحراف المعياري σ مع اختلاف المتوسط μ



بعض المنحنيات الطبيعية لها نفس المتوسط μ مع اختلاف الانحراف المعياري σ

خواص المنحنى الطبيعي :



١ المنحنى متصل ويقع بأكمله فوق محور السينات، ومساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى وفوق محور السينات تساوي الواحد الصحيح.

٢ المنحنى متماثل بالنسبة للمستقيم س = μ ،

أي أن: المستقيم س = μ يقسم المساحة أسفل المنحنى وفوق محور السينات إلى قسمين متساويين في المساحة ومساحة كل منهما = $\frac{١}{٢}$

٣ الدالة التي يمثلها تتزايد في الفترة] − ∞ ، μ] وتتناقص في الفترة [μ ، ∞[.

٤ المنحنى له قمة واحدة عند س = μ .

٥ يمتد طرفا المنحنى إلى ما لا نهاية حيث يقتربان من المحور السيني دون أن يقطعاه.

٦ المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق الفترة [μ − σ ، μ + σ] .

تمثل ٦٨,٢٦ ٪ من المساحة الكلية تحت هذا المنحنى ،
المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق الفترة [μ − ٢σ ، μ + ٢σ] .

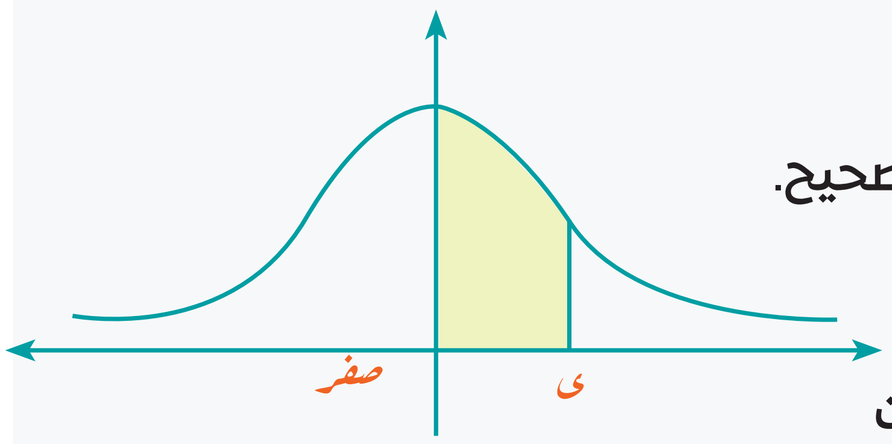
تمثل ٩٥,٤٤ ٪ من المساحة الكلية تحت هذا المنحنى
المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق الفترة [μ − ٣σ ، μ + ٣σ] .

تمثل ٩٩,٧٤ ٪ من المساحة الكلية تحت هذا المنحنى.

المتغير العشوائي الطبيعي

هو توزيع طبيعي متوسطه (μ) = صفر ، وانحرافه المعياري (σ) = ١

خواص منحنى التوزيع الطبيعي المعياري :



١ المساحة فوق محور السينات وتحت المنحنى = الواحد الصحيح.

٢ المنحنى متماثل بالنسبة للمحور الرأسي (س = ٠)
الذي يقسم المنطقة تحت المنحنى وفوق محور السينات
إلى منطقتين متماثلتين ومساحة كلاً منها $\frac{١}{٢}$

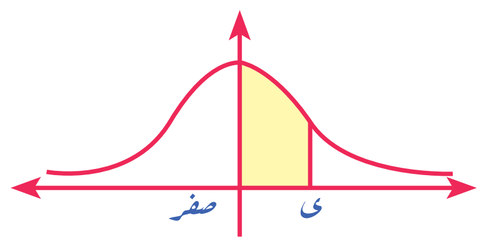
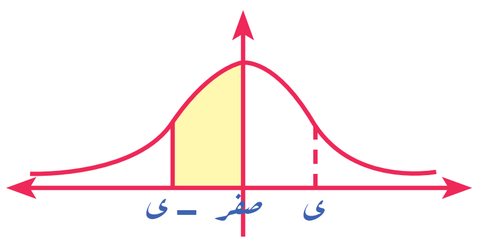
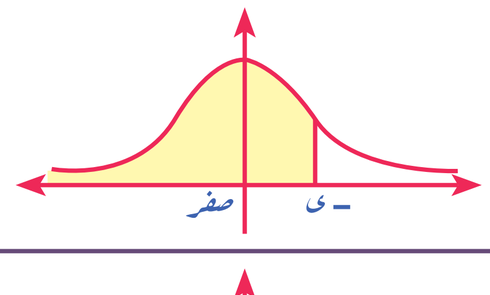
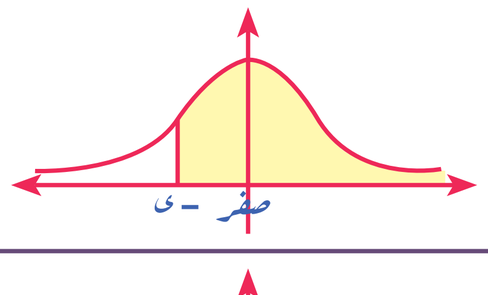
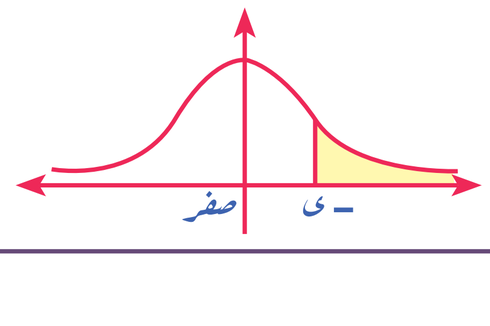
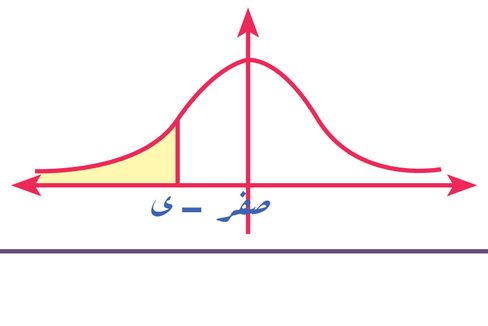
٣ مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى وفوق الفترة [٠ ، ى] تمثل عددياً احتمال وقوع المتغير العشوائي ص في الفترة [٠ ، ى]

أي أن : ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري
وفوق الفترة [٠ ، ى]

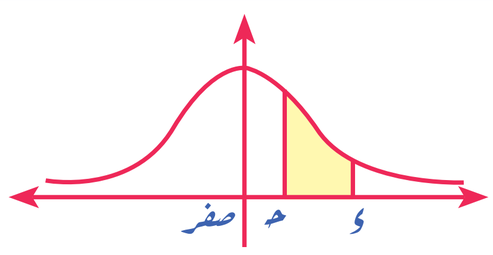
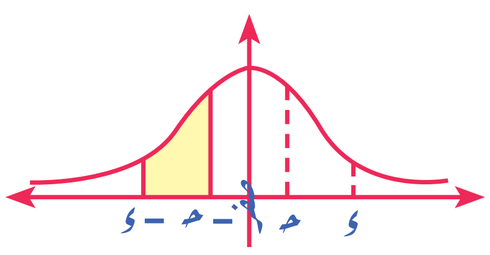
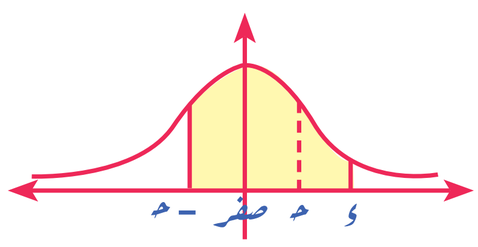
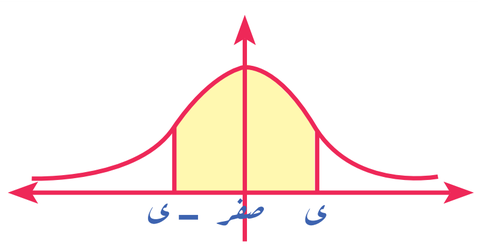
ويكشف عنها مباشرة في جدول المساحات (المبين في آخر الكتاب) حيث ي عدد حقيقى موجب يأخذ قيم حتى ٣,٥٩

أهم قواعد استخدام جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري

حيث ى ، ﻫ ، ﻭ أعداد موجبة ، ﻫ > ﻭ

الاحتمال المطلوب	وضعه بالصورة المستخدمه فى الجدول	المساحة التى تمثل الاحتمال المطلوب
ل (٠ ≤ ص ≤ ى) **أو** ل (− ى ≤ ص ≤ ٠)	يكشف فى الجدول مباشرة على الصورة ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	 
ل (ص ≤ ى) **أو** ل (ص ≥ − ى)	٠٫٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	 
ل (ص ≤ ى) **أو** ل (ص ≥ − ى)	٠٫٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	 

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ل (ح ≥ ص ≥ ى) أو ل (ـ ى ≥ ص ≥ ـ ح)	ل (٠ ≥ ص ≥ ى) ـ ل (٠ ≥ ص ≥ ح)	 
ل (ـ ح ≥ ص ≥ ى)	ل (٠ ≥ ص ≥ ى) + ل (٠ ≥ ص ≥ ح)	
ل (ـ ى ≥ ص ≥ ى) ل (|ص| ≥ ى)	٢ ل (٠ ≥ ص ≥ ى)	

ملاحظة

١ ل (ص ≤ ٠) = ل (ص ≥ ٠) = $\frac{١}{٢}$

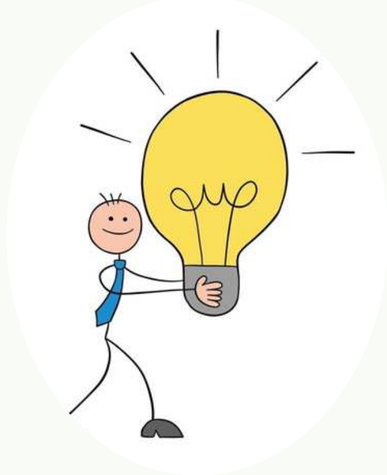
٢ نعتبر ل (ص > P) ≃ صفر ، ل (ص > P) ≃ ١ لكل P > ٣٫٥٩

٣ ل (ص > μ) = ل (ص > ٠) حيث ل (ص > σ٢) = ل (ص > ٣)

[حيث : صفر = μ ، σ = ١ فى التوزيع الطبيعى المعيارى

٤ إذا كان : ل (ص > ى) = ٠٫٣١٨١ مثلاً أقل من $\frac{١}{٢}$ فإن ى موجب

إذا كان : ل (ص > ى) = ٠٫٨٨٣٢ مثلاً أكبر من $\frac{١}{٢}$ فإن ى سالبة



٥ ل (\|ص\| ≥ P٣) = ل (ـ P٣ ≥ ص ≥ P٣) = ٢ ل (٠ ≥ ص ≥ P٣)

٦ يستحسن أن يرسم الطالب المنحنى الطبيعي المعياري وتحديد المساحة التي تمثل الاحتمال المطلوب دون اللجوء إلى حفظ القواعد المذكورة في الجدول السابق.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

حساب الاحتمالات لمتغير طبيعي غير معياري

إذا كان س متغيراً طبيعياً غير معياري متوسطه μ وانحرافه المعياري σ فإننا نحول هذا المتغير إلى متغير طبيعي معياري ص **بالقاعدة :**

$$ص = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

ويكون $ل(أ \leq س \leq ب) = ل(\frac{أ - \mu}{\sigma} \leq ص \leq \frac{ب - \mu}{\sigma})$

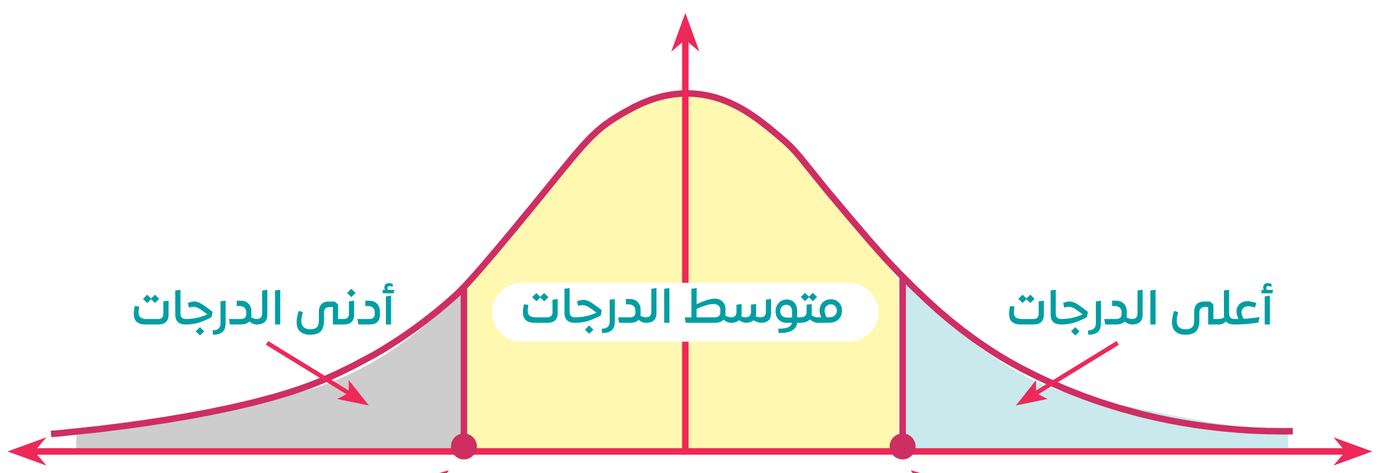
$$ل(\mu + أ\sigma \leq س \leq \mu + ب\sigma) = ل(أ \leq ص \leq ب)$$

إذا كانت درجات الطلاب في إحدى المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ وانحرافه المعياري (σ) وكان لدينا مثلاً قيمة احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من قيمة معينة (أ)

فإن :

- النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على درجة أكبر من أ = (الاحتمال × ١٠٠) ٪
- عدد هؤلاء الطلاب = الاحتمال × العدد الكلي للطلاب
- الدرجة المعيارية = $\frac{\text{الدرجة الحقيقية - المتوسط } (\mu)}{\text{الانحراف المعيارى } (\sigma)}$

لإيجاد الحد الأدنى لأعلى الدرجات أ، الحد الأعلى لأدنى الدرجات يجب تذكر الرسم الآتي جيداً.



التقدير الإحصائي وفترات الثقة

المعلمة ← قيمة عددية ثابتة تميز المجتمع **مثل** المتوسط (μ) أو الانحراف المعياري (σ)

الإحصاءة ← قيمة عددية تتميز بها العينة **مثل** المتوسط $\bar{س}$ أو الانحراف المعياري (s)

عادة تكون المعلمة مجهولة أما الإحصاءة تكون معلومة ويمكن حسابها من العينة وتستخدم قيمة الإحصاءة كقيمة تقديرية للمعلمة.

التقدير ← هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لِمُعْلَمة المجتمع ككل وتوزيعه، وله أسلوبين **هما :**

١ التقدير بنقطة

هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير مَعْلَمة مجهولة من معالم المجتمع.

مثل الوسط الحسابي لعينة عشوائية ($\bar{س}$) ويستخدم لتقدير متوسط للمجتمع μ

٢ التقدير بفترة ثقة

هو إيجاد فترة معينة يُتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو باحتمال معين وهذه الفترة **تسمى** فترة الثقة.

فترة الثقة ← هي فترة تُستخدم في الإحصاء لتقدير قيمة معلمة غير معروفة للمجتمع.

مستوى الثقة ← هو احتمال أن تكون فترة الثقة تحوي القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع قيد الدراسة وقيمة مستوى الثقة تساوى $(١ - \alpha)$ حيث α **هي** نسبة الخطأ في التقدير.

فمثلاً

١ إذا كانت $\alpha = ٠,٠٥$ **فإن** مستوى الثقة = $(١ - \alpha) = ٠,٩٥ = ٩٥٪$

٢ إذا كانت $\alpha = ٠,٠١$ **فإن** مستوى الثقة = $(١ - \alpha) = ٠,٩٩ = ٩٩٪$

تفسير فترة الثقة ← فترة الثقة بمستوى ٩٥ ٪ تعنى أنه عند تكرار تجربة بنفس الحجم عدد ١٠٠ مرة فإننا نثق بأن ٩٥ فترة من الفترات المئة يقع تقدير المَعْلَمة بداخلها.

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

عند إيجاد فترة الثقة سنكتفى بمستوى ثقة ٩٥ ٪ والتي تناظرها القيمة الحرجة ص $\frac{\alpha}{٢}$ = ١,٩٦
(من جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي المعياري)

الخطأ فى التقدير

عند استخدام عينة لتقدير المتوسط في المجتمع يكون الخطأ فى التقدير والذى يرمز له بالرمز هـ عند درجة ثقة ١ - α يتعين من العلاقة التالية :

$$هـ = (ص_{\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}})$$

حيث ع الانحراف المعياري للمجتمع ، ن حجم العينة

التقدير بفترة الثقة لمتوسط المجتمع μ

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها ن من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $ع^{٢}$

فإن $\mu \in [\overline{س} - هـ ، \overline{س} + هـ]$

، $\overline{س}$ هو الوسط الحسابي للعينة ، هـ هو الخطأ في التقدير
كما يسمى الطرفين $\overline{س} - هـ ، \overline{س} + هـ$ بالحدين الأدنى والأعلى لفترة الثقة.

ملاحظات

١ في حالة إذا كان حجم العينة أكبر من ٣٠ ، ع غير معلومة فإنه يمكن اعتبار أن الانحراف المعياري للمجتمع ع **هو** الانحراف المعياري للعينة.

٢ الوسط الحسابي للعينة ($\overline{س}$) = $\frac{١}{٢}$ (الحد الأعلى لفترة الثقة + الحد الأدنى لفترة الثقة)

، الخطأ في التقدير (هـ) = $\frac{١}{٢}$ (الحد الأعلى لفترة الثقة - الحد الأدنى لفترة الثقة)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizK